无穷级数的习题课

1　内容及要求

2　典型例题

1 内容及要求

(1) 理解常数项级数的定义及性质

(2) 掌握常数项级数敛散性的判别法

(3) 熟练掌握幂级数的收敛半径、收敛域的求法

(4) 会利用幂级数的运算法则求一些幂级数的和函数

(5) 熟悉 $\dfrac{1}{1\pm x}$、e^x、$\sin x$、$\cos x$、$\ln(1+x)$、$(1+x)^m$ 麦克劳林展开式，并会利用间接展开法将一些函数展开成幂级数。

$u_n \to 0?$

- 否 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散
- 是
  - $u_n \geq 0$
    - 比值法、根值法
    - 比较法、比较法的极限形式
    - 级数收敛的定义、性质
  - 一般项级数
    - 首先考察 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$
    - 如收敛 $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛
    - 如发散
      - 若用比值，根值，则发散
      - 交错级数
        - 莱布尼兹判别法
        - 对 u_n 进行处理
        - 用定义
      - 其他,用定义

2 典型例题

例1 填空

(1) 若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ 可能收敛也可能发散 ______

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$收敛. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$收敛，$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$发散.

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ 收敛 ______

若$\sum_{n=1}^{\infty} a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ 2}$ 收敛 ______

$$\lim_{n\to\infty} |a_n| = 0 \Rightarrow \exists N, \forall n > N, |a_n| < 1 \ \Rightarrow (a_n)^2 < |a_n| < 1$$

(2) 已知 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1,\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 可能收敛也可能发散

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\dfrac{1}{n}}{\dfrac{(-1)^n}{\ln n}}=1+\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n\ln n}{n}=1$$

但 $\sum\limits_{n=2}^{\infty}[\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\dfrac{1}{n}]=\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{\ln n}+\sum\limits_{n=2}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ 发散。

(3) 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 收敛，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{a_n}{n}$ 绝对收敛。

$$\left|\frac{a_n}{n}\right|\le\frac{1}{2}\left[\frac{1}{n^2}+a_n^2\right],$$

$\because\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n^2,\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}$ 收敛，$\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left|\dfrac{a_n}{n}\right|$ 收敛。

(4) $k>0$,，则$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$ 条件收敛。

$$\because \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{k+n}{n^2}}{\frac{1}{n}}=1,\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}\frac{k+n}{n^2}\text{发散},$$

而交错级数$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{k+n}{n^2}$收敛，

原级数条件收敛

(5) 若$\sum_{n=1}^{\infty} u_n$收敛，则必收敛的级数为（D）

$(A)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{u_n}{\sqrt{n}}$ $\qquad (B)\quad \sum_{n=1}^{\infty} u_n{}^2$

$(C)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n})$ $\qquad (D)\quad \sum_{n=1}^{\infty} (u_n + u_{n+1})$

反例: $(A),(B): u_n = (-1)^n \frac{1}{\sqrt{n}}$

$(C): u_n = (-1)^{n-1} \frac{1}{n} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} (u_{2n-1} - u_{2n}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$

(6) 若$\sum_{n=1}^{\infty} n(u_n - u_{n-1}) = S$，且$\lim_{n\to\infty} nu_n = A$，则$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = A - S$

(6) $\sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1})$

$$= u_1 - u_0 + 2(u_2 - u_1) + 3(u_3 - u_2) + \ldots + n(u_n - u_{n-1})$$

$$= -(u_0 + u_1 + \ldots + u_{n-1}) + nu_n$$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = -\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} u_k + \lim_{n\to\infty} nu_n$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} nu_n - \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} k(u_k - u_{k-1}) = A - S.$$

例2 判断 $u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin x}{x+1}dx$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$的敛散性

解：当$n\geq 2$， $x\in(0,\frac{\pi}{n})$时, $\sin x<x<\frac{\pi}{n}$

$$0<u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin x}{x+1}dx<\int_0^{\pi/n}\frac{\frac{\pi}{n}}{1+x}dx=\frac{\pi}{n}\ln(1+\frac{\pi}{n})$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\pi}{n}\ln(1+\frac{\pi}{n})}{\frac{\pi^2}{n^2}}=1 \quad \sum_{n=2}^{\infty}\frac{\pi^2}{n^2}\text{收敛} \quad \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty}u_n\text{收敛}$$

$$\int_0^{\pi/n}\frac{\sin x}{x+1}dx<\int_0^{\pi/n}\sin x dx=1-\cos\frac{\pi}{n}\sim\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\pi}{n}\right)^2$$

例3 判断下列级数是条 件收敛还是绝对收敛

(1) $$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$$

解 $$a_n = n^{\frac{1}{n}} - 1 = e^{\frac{1}{n}\ln n} - 1 \sim \frac{\ln n}{n} \quad (n\to\infty)$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)\right|}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{\ln n}{n}}{\frac{1}{n}} = \infty$$

$\Rightarrow$ 原级数不会绝对收敛。

显然 $$\lim_{n\to\infty}(e^{\frac{1}{n}\ln n}-1) = \lim_{n\to\infty}(n^{\frac{1}{n}}-1) = 0$$

例3 判断下列级数是条件收敛还是绝对收敛

(1) $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$

下验证$a_n=(n^{\frac{1}{n}}-1)=e^{\frac{1}{n}\ln n}-1$单调减。

令$f(x)=\dfrac{\ln x}{x}$, $f'(x)=\dfrac{1-\ln x}{x^2}<0 \quad (x>e)$

当$n\geq 3, a_n>a_{n+1}$. $\sum_{n=3}^{\infty}(-1)^n(n^{\frac{1}{n}}-1)$收敛

原级数条件收敛。

(2) $\sum_{n=2}^{\infty}\sin(n\pi+\frac{1}{\ln n})$

解：$a_n=(-1)^n\sin\frac{1}{\ln n}$ 所给级数为交错级数。

$|a_n|=\sin\frac{1}{\ln n}$,

而 $\lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{\ln n}}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n}{\ln n}=\infty$,

$\sum\frac{1}{n}$ 发散，故原级数不绝对收敛。

又 $\lim_{n\to\infty}\sin\frac{1}{\ln n}=0$, 而当 n 很大时, $\sin\frac{1}{\ln n}$ 单调递减，故

原级数条件收敛。

(3) 判断 $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\sqrt{n^2+1}\pi$的收敛性。

解 $a_n=\sin\sqrt{n^2+1}\pi=\sin[n\pi+(\sqrt{n^2+1}-n)\pi]$

$=(-1)^n\sin(\sqrt{n^2+1}-n)\pi=(-1)^n\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

原级数为交错级数，$\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|=\sum_{n=1}^{\infty}\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$ 发散

记 $u_n=\sin\dfrac{\pi}{\sqrt{n^2+1}+n}$

则u_n单调减少且$u_n\to 0\ (n\to\infty)$，依莱布尼兹定理，原级数条件收敛。

例4　求极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$

解

考察$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{3^n}(1+\dfrac{1}{n})^{n^2}=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}$

因为$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{3}(1+\dfrac{1}{n})^n=\dfrac{e}{3}<1$

此级数收敛　　即$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}=s$

所以 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{3^k}(1+\dfrac{1}{k})^{k^2}=0$

例5

(1)设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n - a_{n-1})$收敛，且$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$为收敛的正项级数，证明$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$绝对收敛。

证明：因$s_n = \sum_{k=1}^{n}(a_k - a_{k-1}) = a_n - a_0$，故$a_n = s_n + a_0$

则$a_n \to s + a_0$，从而a_n有界，设$|a_n| \le M$

$|a_n b_n| \le M b_n$，由比较法及$\sum_{n=1}^{\infty} b_n$的收敛性知，

$\sum a_n b_n$绝对收敛。

(2)设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{n=1}^{\infty} b_n$为收敛的级数，

证明$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛。

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2=\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2+\sum_{n=1}^{\infty}b_n^2+2\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$$

证明： $\sum(a_n+b_n)$收敛， $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)^2$也收敛。

若正项级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛

若$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$绝对收敛，则$\sum_{n=1}^{\infty}a_n{}^2$ 收敛

函数项级数的例题

例1　填空

(1) 幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n(n+1)}$的收敛域 [-2，2）

(2) 已知$x=-2$是$\sum_{n=1}^{\infty}a_n x^n$的收敛点，则当$x=\frac{1}{2}$时，级数 绝对收敛

(3) 已知$\sum_{n=1}^{\infty}a_n(x+1)^n$当$x=3$时条件收敛，则幂级数的收敛半径为 $R=4$

(4) 已知$\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-1)^n$当$x=-1$时收敛，则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x-1)^{n-1}$在$x=2$处__绝对收敛__

(5) 已知级数$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$的和函数为$s(x)$, 且$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1}{R}$,

则幂级数$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$的收敛半径为__$R$__，和函数为__$s'(x)$__，$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^{n+1}} x^n$的收敛半径为__$2R$__，和函数为__$\frac{1}{2}s(\frac{x}{2})$__，$\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{2n}$的收敛半径为__$\sqrt{R}$__.

例2 求幂级数的和函数

(1) $$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$$

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{x^2}{2}$$

当$\frac{x^2}{2}<1$即$|x|<\sqrt{2}$时，幂级数收敛

当$x=\pm\sqrt{2}$,级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2}$发散。

故该幂级数的收敛域为 $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

设$s(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}(x^{2n-1})'=(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}x^{2n-1})'$$

$$=(\frac{x}{2}+\frac{x^3}{2^2}+\cdots)'=(\frac{\frac{x}{2}}{1-\frac{x^2}{2}})'=(\frac{x}{2-x^2})'$$

$$=\frac{2+x^2}{(2-x^2)^2},\qquad x\in(-\sqrt{2},\sqrt{2})$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}$$

易知该幂级数的收敛域为[－1，1]，设其和函数为 $s(x)$，

$$s(x)=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2})x^n=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}=f(x)$ $\quad f'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}x^{n-1}=\frac{1}{1-x}$

于是 $f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)$

$$=\int_0^x\frac{dx}{1-x}+0=-\ln(1-x),\qquad x\in[-1,1)$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}$$

设 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=g(x)$,

$$x^2g(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{n+2}=\sum_{n=3}^{\infty}\frac{x^n}{n}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-x-\frac{x^2}{2}$$

$$=-\ln(1-x)-\frac{x^2}{2}-x$$

$$g(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\ln(1-x)+x}{x^2}, & x\in[-1,1)\text{且}x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$$(2)\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}-\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n+2}=\frac{1}{2}f(x)-\frac{1}{2}g(x)$$

收敛域为[－1，1]　$f(x)=-\ln(1-x),\quad x\in[-1,1)$

$$g(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}-\frac{\ln(1-x)+x}{x^2}, & x\in[-1,1)\text{且}x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

$s(x)$

$$=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{4}+\frac{\ln(1-x)+x}{2x^2}, & x\in[-1,1)\text{且}x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$$

当$x=1$时：　$s(1)=?$ 可直接计算：

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\frac{3}{4}$$

由于幂级数在 $x=\pm1$ 处收敛，故和函数分别在 $x=\pm1$ 处左连续与右连续，

$$s(1)=\lim_{x\to1^-}s(x)=\frac{1}{4}+\lim_{x\to1^-}\left[\frac{1+x}{2x^2}(1-x)\ln(1-x)+\frac{1}{2x}\right]$$

$$=\frac{1}{4}+\lim_{t\to0+}t\ln t+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

$$s(x)=\begin{cases}-\frac{1}{2}\ln(1-x)+\frac{1}{4}+\frac{\ln(1-x)+x}{2x^2}, & x\in[-1,1)\text{且}x\neq0\\ 0, & x=0\\ \frac{3}{4} & x=1\end{cases}$$

$$(3)\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n$$

令 $t = x-1$, 则原级数变为 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$,

易知 $\sum_{n=1}^{\infty} nt^n$ 的收敛域为 $(-1,1)$

故原级数的收敛域为 $(0,2)$.

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(x-1)^n = \sum_{n=1}^{\infty} nt^n = t\sum_{n=1}^{\infty} nt^{n-1} = t\left(\sum_{n=1}^{\infty} t^n\right)'$$

$$= t\left(\frac{t}{1-t}\right)' = \frac{t}{(1-t)^2} = \frac{x-1}{(2-x)^2} \quad x \in (0,2)$$

(4) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2n+1}{n!}x^{2n}$ 并求级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)2^n}{n!}$ 的和。

易知所给幂级数的收敛半径 $R=+\infty$，设其和函数为 $s(x)$，则

$$\int_0^x s(x)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{2n+1}}{n!}=x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x^2)^n}{n!}=xe^{x^2}$$

$$s(x)=(xe^{x^2})'=(1+2x^2)e^{x^2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(2n+1)2^n}{n!}=s(\sqrt{2})=5e^2$$

例3 将下列函数展成 x 的幂级数

$$(1)\ f(x)=\arctan\frac{4+x^2}{4-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$$

$$f'(x)=\frac{1}{1+\left(\frac{4+x^2}{4-x^2}\right)^2}\cdot\frac{2x(4-x^2)+2x(4+x^2)}{(4-x^2)^2}=\frac{8x}{16+x^4}$$

$$=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{1+\left(\frac{x}{2}\right)^4}=\frac{x}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n}}{2^{4n}}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{4n+1}}{2^{4n+1}}$$

$$f(x)=\int_0^x f'(x)dx+f(0)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)2^{4n+2}}x^{4n+2}+\frac{\pi}{4}$$

级数的收敛域为[-2，2]，结合定义域，$x\in(-2，2)$

$$(2)\ f(x)=\frac{1}{(2-x)^2}$$

$$\int_0^x f(x)dx \quad =\int_0^x \frac{1}{(2-x)^2}dx \quad =-\frac{1}{2}+\frac{1}{(2-x)}$$

$$=-\frac{1}{2}+\frac{1}{2(1-\frac{x}{2})} =-\frac{1}{2}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{2^{n+1}} \quad |\frac{x}{2}|<1$$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^{n+1}} \quad |x|<2$$

法二：$f(x)=\dfrac{1}{4(1-\frac{x}{2})^2} =\dfrac{1}{4}(1-\dfrac{x}{2})^{-2}$

例4 求极限$\lim\limits_{n\to\infty}[2^{\frac{1}{3}}\cdot 4^{\frac{1}{9}}\cdots\cdots(2^n)^{\frac{1}{3^n}}]$

解 原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{3^k}}$

只需求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}$，即求$\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^n$当$x=\frac{1}{3}$的值。

$$\sum_{n=1}^{\infty}nx^n=x\sum_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=x\sum_{n=1}^{\infty}(x^n)'=x\left(\frac{x}{1-x}\right)'$$

$$=x\left(\frac{1}{1-x}\right)'=\frac{x}{(1-x)^2}\qquad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{3^n}=\frac{x}{(1-x)^2}\bigg|_{x=\frac{1}{3}}=\frac{3}{4}$$

原式$=\lim\limits_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\frac{3}{4}}=\sqrt[4]{8}$

例4　解法二：初等技巧

$$原式=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}}=2^{\lim\limits_{n\to\infty}S_n}$$

$$S_n=\frac{1}{3}+\frac{2}{3^2}+\frac{3}{3^3}\cdots\cdots+\frac{n}{3^n}$$

$$\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3^2}+\frac{2}{3^3}+\cdots\cdots+\frac{n-1}{3^n}+\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$S_n-\frac{1}{3}S_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{3^n}-\frac{n}{3^{n+1}}=\frac{\frac{1}{3}-\frac{1}{3^{n+1}}}{1-\frac{1}{3}}-\frac{n}{3^{n+1}}$$

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{3}{4}\qquad 原式=2^{\frac{3}{4}}$$